А. А. Меленцов

ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА W_p^{α} ($[0,1]^2$) БИЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ

В большом цикле работ М-Б. А. Бабаева изучен вопрос о скорости приближения функций соболевского класса $W_p^{\alpha}(I^m)$ в метрике $L_q(I^m)$ билинейными формами порядка M при $1 \le p \le q \le \infty$ и $M \to \infty$. В настоящей работе эта задача рассматривается в случае $m=2$ при $0 < q \le p \le \infty$. Доказательство основного результата, сформулированного в теореме 3.1, в отличие от методов М-Б. А. Бабаева, конструктивное и его легко реализовать в виде вычислительного алгоритма для каждого M и каждой функции $f(x) \in W_p^{\alpha}(I^2)$.

1. Пусть на квадрате $[0,1]\times[0,1]=I^2$, $I=[0,1]$, задана функция $f(x)=f(x_1 x_2) \in W_p^{\alpha}(I^2)$, где $1 \le p \le \infty$, α - натуральное число, $\ell = \alpha - 1$, $x=(x_1, x_2)$.

Через G_M обозначим множество всех билинейных функций вида

$$q_M(x)=\sum_{s=1}^{M} \varphi_s(x_1)\,\psi_s(x_2), \tag{1.1}$$

где $\varphi_s(x_1),\ \psi_s(x_2) \in L_q[0,1]$.

Ясно тогда, что $G_M \subset L_q(I^2)$.

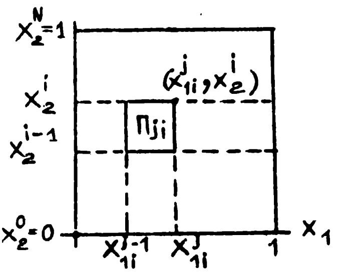

Рис. 1

Отрезок $[0,1]$ на оси Ox_2 разобьем точками $\{x_2^i\}_{i=0}^N$ на промежутки. По определению полагаем

$\Delta x_2^i=(x_2^{i-1}, x_2^i]$ $(i=2,3,\dots,N)$

и $\Delta x_2^1=[x_2^0, x_2^1]$. Длину каждого промежутка обозначим как обычно

$|\Delta x_2^i| = x_2^i - x_2^{i-1}$ $(i=1,2,\dots,N)$.

Пусть $R_K^2=\{\Delta x_2^i\}_{i=1}^N$ - совокупность всех промежутков. Каждой точке множества $\{x_2^i\}_{i=1}^N$ поставим в соответствие разбиение промежутка $0 \le x_1 \le 1$ точками $\{x_{1i}^j\}_{j=0}^N$ $(i=1,2,\dots,N)$ на промежутки Δx_{1i}^j.

Причем $x_{1i}^{0}=0$, $x_{1i}^{N_i}=1$ при $i=1\dots,N$.

Кроме того, полагаем $\Delta x_{1i}^{1}=[x_{1i}^{0},x_{1i}^{1}]$, $\Delta x_{1i}^{j}=(x_{1i}^{j-1},x_{1i}^{j}]$ для $j=2,3,\dots N_i$ и $|\Delta x_{1i}^{j}|=x_{1i}^{j-1}-x_{1i}^{j-1}$ $(j=1,\dots,N_i)$.

Обозначим через Π_i прямоугольник

$\Pi_i=\{(x_1,x_2)\,|\,0\leqslant x_1\leqslant 1,\ x_2\in\Delta x_2^i\}$,

а через Π_{ji} - прямоугольник $\Pi_{ji}=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1\in\Delta x_{1i}^{j},x_2\in\Delta x_2^i\}$ (рис.1). Ясно, что $\bigcup\limits_{j=1}^{N_i}\Pi_{ji}=\Pi_i$, $i=1,2\dots,N$, $\bigcup\limits_{i=1}^{N}\Pi_i=I^2$.

Кроме того отметим, что

$$\Pi_{ji}\cap\Pi_{j'i'}=\begin{cases}\Pi_{ji} & \text{при } j=j' \text{ и } i=i'\\ \varnothing & \text{при } j\neq j' \text{ или } i\neq i'.\end{cases}$$

Отсюда следует, что множество прямоугольников $\{\Pi_{ji}\}$ является разбиением основного квадрата I^2. Легко видеть, что число элементов разбиения равно сумме $K=\sum\limits_{i=1}^{N}N_i$.

Обозначим построенное разбиение через R_K

$$R_K=\{\Pi_{ji}\}_{j=1\ i=1}^{N_i,\ N}. \tag{1.2}$$

Зададим на каждом прямоугольнике Π_{ji} фиксированный многочлен степени ℓ по совокупности переменных

$$P_{\Pi ji}(x)=\sum_{0\leqslant K_1+K_2\leqslant\ell} C_{K_1K_2}^{ji}x_1^{K_1}x_2^{K_2}. \tag{1.3}$$

Зададим на квадрате I^2 кусочно-полиномиальную функцию $T_K(x)$, совпадающую на каждом прямоугольнике Π_{ji} с выбранным многочленом (1.3).

Лемма 1. Пусть $T_K(x)$ - кусочно-полиномиальная функция, заданная на разбиении R_K, получающаяся путем разбиения квадрата I^2 на N полос Π_i прямыми, параллельными оси Ox_1, с последующим разбиением каждой полосы на произвольное число N_i прямоугольников Π_{ji}.

Тогда $T_K(x)$ принадлежит классу G_M биномиальных функций вида (1.1), где $M=N(\ell+1)$.

Доказательство. Пусть $\chi_{\Pi ji}$ - характеристическая функция прямоугольника Π_{ji}, определенная на I^2:

$$\chi_{\Pi ji}=\begin{cases}1, & x\in\Pi_{ji}\\ 0, & x\in I^2\setminus\Pi_{ji}\end{cases}. \tag{1.4}$$

Ясно, что тогда функцию можно представить в следующем виде:

$$T_K(x)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i}\chi_{\Pi ji}(x)P_{\Pi ji}(x), \quad (1.5)$$

где $P_{\Pi ji}(x)$ многочлен (1.3).

Пусть $\chi_{\Delta x_2^i}(x_2)$ и $\chi_{\Delta x_{1i}^j}(x_1)$ - характеристические функции промежутков Δx_2^i и Δx_{1j}^j, соответственно

$$\chi_{\Delta x_2^i}(x_2)=\begin{cases}1, & x_2\in\Delta x_2^i\\ 0, & x_2\in I\setminus\Delta x_2^i\end{cases}, \qquad \chi_{\Delta x_{1i}^j}(x_1)=\begin{cases}1, & x_1\in\Delta x_{1i}^j\\ 0, & x_1\in I\setminus\Delta x_{1i}^j\end{cases}.$$

Тогда для любого $x\in I^\ell$ имеют место равенства

$$\chi_{\Pi ji}(x)=\chi_{\Delta x_2 i}(x_2)\cdot\chi_{\Delta x_{1i}^j}(x_1), \qquad x=(x_1, x_2)$$

и, следовательно,

$$T_K(x)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i}\chi_{\Delta x_2^i}(x_2)\chi_{\Delta x_{1i}^i}(x_1)P_{\Pi j1}(x) \quad . (1.6)$$

Преобразуем сумму в (1.3) следующим образом: для каждого $\lambda\leq\ell$ выделим те слагаемые в сумме, для которых $K_1+K_2=\lambda$, тогда

$$P_{\Pi ji}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\ell}\sum_{K_1+K_2=\lambda}C_{K_1K_2}^{ji}x_1^{K_1}x_2^{K_2}=\sum_{\lambda=0}^{\ell}\sum_{K_2=0}^{\lambda}C_{\lambda-K_2, K_2}^{ji}x_1^{\lambda-K_2}x_2^{K_2}=$$

$$=\sum_{K_2=0}^{\ell}\sum_{\lambda=K_2}^{\ell}C_{\lambda-K_2, K_2}^{ji}x_1^{\lambda-K_2}x_2^{K_2}=\sum_{K_2=0}^{\ell}\sum_{K_1=0}^{\ell-K_2}C_{K_1K_2}^{ji}x_1^{K_1}x_2^{K_2}.$$

Заменяя полиномы в представлении кусочно-полиномиальной функции (1.6) их последними представлениями, получим

$$T_K(x)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i}\chi_{\Delta x_2 i}(x_2)\chi_{\Delta x_{1i}^j}(x_1)\sum_{K_2=0}^{\ell}\sum_{K_1=0}^{\ell-K_2}C_{K_1K_2}^{ji}x_1^{K_1}x_2^{K_2}.$$

Изменив порядок суммирования по переменным j и K_2, найдем

$$T_K(x)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{K_2=0}^{\ell}\sum_{j=1}^{N_i}\sum_{K_1=0}^{\ell-K_2}\chi_{\Delta x_2^i}(x_2)\chi_{\Delta x_{1i}^j}(x_1)C_{K_1K_2}^{ji}x_1^{K_1}x_2^{K_2}=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{K_2=0}^{\ell}\chi_{\Delta x_2^i}(x_2)x_2^{K_2}\sum_{j=1}^{N_i}\sum_{K_1=0}^{\ell-K_2}\chi_{\Delta x_{1i}^j}(x_1)C_{K_1K_2}^{ji}x_1^{K_1}.$$

Если теперь положить

$$\varphi_{K_2,i}(x_1)=\sum_{j=1}^{N_i}\sum_{K_1=0}^{\ell-K_2}\chi_{\Delta x_{1i}^{j}}(x_1)\,C_{K_1K_2}^{ji}x_1^{K_1},\quad \Psi_{K_2,i}(x_2)=\chi_{\Delta x_2^{i}}(x_2)x_2^{K_2},$$

то окончательно получим

$$T_K(x)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{K_2=0}^{\ell}\varphi_{K_2,i}(x_1)\Psi_{K_2,i}(x_2).$$

Следовательно, $T_K(x)\in G_M$ при $M=N(\ell+1)$.

Лемма доказана.

2. Напомним определение класса $W_p^{\alpha}(I^2)$ для целых $\alpha\geq 1$ и $1\leq p\leq\infty$.

При $p<\infty$ функция $f(x)\in W_p^{\alpha}(I^2)$, если она интегрируема в p -той степени на I^2 вместе со своими обобщенными производными порядка α [2, с. 34].

При $p=\infty$ функция $f(x)\in W_\infty^{\alpha}(I^2)$, если она вместе со своими обобщенными производными порядка α существенно ограничена на I^2, т.е. $f\in W_\infty^{\alpha}(I^2)$, если каждой обобщенной производной $D^n f$, $n=(n_1,n_2)$, $n_1+n_2=\alpha$ соответствует число такое, что неравенство $|D^n f(x)|\leq A$ имеет место почти всюду на I^2.

Пусть $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ - целые неотрицательные числа. Оператор дифференцирования $D^{\varkappa}$ определяется равенством

$$D^{\varkappa}=\frac{\partial^{|\varkappa|}}{\partial x_1^{\varkappa_1}\,\partial x_2^{\varkappa_2}},\tag{2.1}$$

где $\varkappa=(\varkappa_1,\varkappa_2)$ и $|\varkappa|=\varkappa_1+\varkappa_2$.

Норма элемента f пространства $W_p^{\alpha}(I^2)$ при $1\leq p\leq\infty$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{W_p^{\alpha}(I^2)}=\|f\|_{L_p(I^2)}+\|f\|_{L_p^{\alpha}(I^2)},\tag{2.2}$$

где при $1\leq p\leq\infty$

$$\|f\|_{L_p(I^2)}=\left(\int_{I^2}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

и

$$\|f\|_{L_p^{\alpha}(I^2)}=\left(\sum_{|\varkappa|=\alpha}\int_{I^2}|D^{\varkappa}f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

а при $P = \infty$

$$\|f\|_{L_\infty(I^2)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in I^2} \{|f(x)|\},$$

$$\|f\|_{L^\alpha_\infty(I^2)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in I^2} \sum_{|\varkappa|=\alpha} |D^\varkappa f(x)|.$$

Пусть Π - прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, $\Pi \subset I^2$ и $|\Pi|$ - площадь прямоугольника Π. Аналогично только что введенным нормам в пространстве $W_p^\alpha(I^2)$ определяются нормы в пространстве $W_p^\alpha(\Pi)$:

$$\|f\|_{W_p^\alpha(\Pi)} = \|f\|_{L_p(\Pi)} + \|f\|_{L^\alpha_p(\Pi)}. \tag{2.3}$$

Пусть Δ - квадрат со сторонами, параллельными осям координат, вложенный в I^2.

В работе [1] в лемме 3.1 доказано, что при $\frac{1}{p} < \frac{\alpha}{2}$ для любой функции $f \in W_p^\alpha(\Delta)$ существует полином $(P_\Delta f)(x)$ степени ℓ $(\alpha - 1 = \ell)$ такой, что для каждого $x \in \Delta$ имеет место неравенство

$$|f(x) - (P_\Delta f)(x)| \leqslant C|\Delta|^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{p}} \|f\|_{L^\alpha_p(\Delta)}, \tag{2.4}$$

где C не зависит от x, f, Δ, т.е. $C = C(p, \alpha)$.

Интегрируя q-тую степень, $0 < q < \infty$, правой и левой частей последнего неравенства по квадрату Δ, получим

$$\|f - P_\Delta f\|_{L_q(\Delta)} \leqslant C|\Delta|^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \|f\|_{L^\alpha_p(\Delta)}, \tag{2.5}$$

где $0 \leqslant 1/p < \alpha/2$, $1/p \leqslant 1$, $0 < q \leqslant \infty$.

В той же работе в лемме 3.2. установлено, что при $\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant 1$ и $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{\alpha}{2}$ для любой $f \in W_p^\alpha(I^2)$ существует полином $(P_\Delta f)(x)$ степени $\ell = \alpha - 1$, такой, что имеет место неравенство

$$\|f - P_\Delta f\|_{L_q(\Delta)} \leqslant C|\Delta|^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \|f\|_{L^\alpha_p(\Delta)}. \tag{2.6}$$

В трех последних неравенствах $C=C(p,q,\alpha)$ - константа, не зависящая от Δ и от f.

Объединяя оценки (2.5) и (2.6), замечаем, что при всех p, $1\leq p\leq\infty$ и $0<q\leq\infty$ таких, что $\frac{1}{q}>\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{2}$, выполняется неравенство

$$\|f-P_\Delta f\|_{L_q(\Delta)}\leq C|\Delta|^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\|f\|_{L_p^\alpha(\Delta)}, \tag{2.7}$$

которое при $\Delta=I^2$ имеет вид

$$\|f-P_{I^2}f\|_{L_q(I^2)}\leq C\|f\|_{L_p^\alpha(I^2)}. \tag{2.8}$$

Лемма 2. Для каждой функции $f(x)\in W_p^\alpha(I^2)$ и каждого прямоугольника $\Pi=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\subset I^2$ существует многочлен $(P_\Pi f)(x)$ степени $\ell=\alpha-1$ и существует константа $C=C(p,q,\alpha)<\infty$, такие, что при любых p, $1\leq p<\infty$ и любых q, удовлетворяющих условиям $\frac{1}{q}>\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{2}$, $0<q\leq\infty$, выполняется неравенство

$$\|f-P_\Pi f\|_{L_q(\Pi)}\leq C|\Pi|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\Big(\iint_\Pi\sum_{\varkappa_1+\varkappa_2=\alpha}|D^\varkappa f(x)|^p(b_1-a_1)^{\varkappa_1 p}(b_2-a_2)^{\varkappa_2 p}dx_1dx_2\Big)^{1/p}, \tag{2.9}$$

а при $p=\infty$, $\frac{1}{q}>-\frac{\alpha}{2}$ - неравенство

$$\|f-P_\Pi f\|_{L_q(\Pi)}\leq C|\Pi|^{\frac{1}{q}}\times$$

$$\times\ \operatorname{ess\,sup}\sum_{|\varkappa|=\alpha}|D^\varkappa f(x)|(b_1-a_1)^{\varkappa_1}(b_2-a_2)^{\varkappa_2}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть

$$\Pi=\{x=(x_1,x_2)\mid a_1<x_1<b_1,\ a_2<x_2<b_2\}\subset I^2.$$

В силу (2.8) для любой функции $g(x)\in W_p^\alpha(I^2)$ при $1\leq p<\infty$ и $\frac{1}{q}>\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{2}$, $0<q<\infty$ существует полином $(Pg)(x)$ степени $\ell=\alpha-1$ такой, что

$$\Big(\int_0^1\int_0^1|g(\xi)-(Pg)(\xi)|^q d\xi_1d\xi_2\Big)^{\frac{1}{q}}\leq C\Big(\int_0^1\int_0^1\sum_{|\varkappa|=\alpha}\Big|\frac{\partial^\alpha g(\xi)}{\partial\xi_1^{\varkappa_1}\partial\xi_2^{\varkappa_2}}\Big|^p d\xi_1d\xi_2\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.11}$$

Для любой функции $f(x)\in W_p^{\alpha}(I^2)$ рассмотрим ее сужение на прямоугольник Π и положим в 2.11.

$$g(\xi)=f\,(x_1(\xi),\,x_2(\xi)), \tag{2.12}$$

где

$$x_1=x_1(\xi_1)=(b_1-a_1)\xi_1+a_1,\quad x_2=x_2(\xi_2)=(b_2-a_2)\xi_2+a_2\,,$$

$$(x_1,\,x_2)\in\Pi,\quad (\xi_1,\,\xi_2)\in I^2.$$

Ясно, что функция $g\in W_p^{\alpha}(I^2)$. Для такой функции $g(\xi_1,\xi_2)$ в интегралах неравенства (2.11) сделаем замену переменных (2.12). Так как якобиан

$$\frac{D(\xi_1,\xi_2)}{D(x_1,x_2)}=\frac{1}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\,,$$

а

$$D^{\varkappa}g(\xi)=\frac{\partial^{\alpha}f\,(x_1(\xi_2),x_2(\xi_2))}{\partial\xi_1^{\varkappa_1}\;\partial\xi_2^{\varkappa_2}}=\frac{\partial^{\alpha}f\,(x_1,x_2)}{\partial x_1^{\varkappa_1}\,\partial x_2^{\varkappa_2}}(b_1-a_1)^{\varkappa_1}(b_2-a_2)^{\varkappa_2}$$

и полином $(Pg)(\xi)$ перейдет в полином степени ℓ по совокупности переменных $x_1,\,x_2$ (обозначим его через $(Pf)(x)$), то в итоге получим неравенство

$$\left(\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}|f(x)-(Pf)(x)|^q\,\frac{dx_1\,dx_2}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\sum_{|\varkappa|=\alpha}\left|\frac{\partial^{\alpha}f(x)}{\partial x_1^{\varkappa_1}\partial x_2^{\varkappa_2}}\,(b_1-a_1)^{\varkappa_1}(b_2-a_2)^{\varkappa_2}\right|^p\frac{dx_1\,dx_2}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)^{1/p}.$$

Умножив правую и левую части этого неравенства на $((b_1-a_1)(b_2-a_2))^{\frac{1}{q}}$ и вынеся в правой части неравенства за знак интеграла множитель $((b_1-a_1)(b_2-a_2))^{-1/p}$, получим неравенство (2.9). Лемма 2 в случае $1\leqslant p<\infty$, $0<q<\infty$ доказана.

Отправляясь от неравенства (2.8), которое при $p=\infty$ для функции $g(\xi)\in W_\infty^{\alpha}(I^2)$ записывается в виде

$$\|g(\xi)-(P_g)(\xi)\|_{L_q(I^2)}\leq C \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in I^2}\sum_{|\varkappa|=\alpha}\left|\frac{\partial^\alpha g(\xi)}{\partial\xi_1^{\varkappa_1}\partial\xi_2^{\varkappa_2}}\right|,$$

аналогичным образом получим неравенство для $p=\infty$, $0<q<\infty$. Оценки (2.9), (2.10) при $q=\infty$ выводятся из (2.8) аналогично. Лемму 2 можно считать доказанной полностью.

3. Используя доказанные леммы 1 и 2, оценим сверху величину наилучшего приближения в $L_q(I^2)$ функций $f(x)\in W_p^\alpha(I^2)$ билинейными формами $g_M(x)\in G_M\subset L_q(I^2)$ при $M\geq\alpha$.

Выберем произвольное разбиение R_K квадрата I^2 , как указано при построении разбиения (1.2). На каждом прямоугольнике $\Pi_{ji}=\Delta x_{1i}^j\times\Delta x_2^i\in R_K$ выберем многочлен $(P_{\Pi_{ji}}f)(x)=(P_{ji}f)(x)$ в соответствии с леммой 2. Тогда по лемме 1 функция

$$T_K(x)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i}\chi_{\Pi_{ji}}(x)(P_{ji}f)(x)=g_M(x,f)$$

есть функция класса $G_M\cap L_q(I^2)$, где $M=N(\ell+1)$ А по лемме 2 с учетом неравенства

$$\Big(\sum_{|\varkappa|\leq\alpha}|A_\varkappa|\Big)^{q/p}=(\alpha+1)^{q/p}\sum_{|\varkappa|=\alpha}|A_\varkappa|^{q/p}\ (A_\varkappa\in R)$$

будем иметь при $0<q<\infty$ оценку

$$\|f(x)-g_M(x,f)\|_{L_q(I^2)}\leq C\ \times \tag{3.1}$$
$$\times\Big(\sum_{|\varkappa|\leq\alpha}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i}|\Delta x_{1i}^j|^{q(\frac1q-\frac1p+\varkappa_1)}|\Delta x_2^i|^{q(\frac1q-\frac1p+\varkappa_2)}\Big(\int\!\!\int_{\Pi_{ji}}\sum_{|K|\leq\alpha}|D^Kf|^p dx\Big)^{\frac qp}\Big)^{\frac1q},$$

где $C_1=C_1(p,q,\alpha)$ - не зависит от $f(x), N, N_i$ и, следовательно, от M .

Таким образом, задача оценки величины

$$E_M(f,q)=\inf\left\{\|f-g_M\|_{L_q(I^2)}:g_M\in G_M\cap L_q(I^2)\right\}$$

сводится к задаче минимизации правой части неравенства (3.1) по всевозможным разбиениям R_K (1.2) квадрата I^2 с фиксированным числом N интервалов ΔX_2^i.

На этом пути можно доказать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Для любых $0 < q \leqslant p \leqslant \infty$ и любого натурального числа α существует константа $0 < C_2 = C_2(p,q,\alpha) < \infty$ такая, что для любой функции $f(y) \in W_p^\alpha(I^2)$ справедливо неравенство

$$E_M(f, g) \leqslant \frac{C_2}{M^\alpha} \| f \|_{L_p^\alpha}(I^2). \qquad (3.2)$$

Доказательство. Для оптимизации разбиения R_K (1.2) при $0 < q \leqslant p < \infty$ разбиение отрезка $0 \leqslant X_2 \leqslant 1$ выберем из условий

$$|\Delta X_2^i|^{(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \alpha)q} \Big(\int_{\Delta X_2^i} dx_2 \int_0^1 \sum_{|\varkappa| = \alpha} |D^\varkappa f|^p dx_1 \Big)^{q/p} = \qquad (3.3)$$
$$= \theta_N \Big(\iint_{I^2} \sum_{|\varkappa| = \alpha} |D^\varkappa f|^p dx \Big)^{q/p},$$

где $\theta_N = N^{-(1+q\alpha)}$ и $X_2^0 = 0$.

Условия (3.3) представляют собой рекуррентные уравнения для последовательного определения точек X_2^1, $X_2^2, \ldots$. Используя неравенство Гельдера, можно доказать, что система (3.3) будет иметь не более N решений $0 < X_2^1 < X_2^2 \ldots < X_2^{\bar N} = 1$ $(\bar N \leqslant N)$. Для каждой полосы $X_2 \in \Delta X_2^i$. $0 \leqslant X_1 \leqslant 1$ разбиение отрезка $0 \leqslant X_1 \leqslant 1$ выберем следующим образом. Вначале построим точки $X_{1i}^{j\varkappa_1}$ $(j = 1, 2, \ldots N_{j\varkappa_1})$ для каждого $\varkappa_1 = 1, 2, \ldots, \alpha$ из условий $X_{1i}^{0\varkappa_1} = 0$,

$$|\Delta X_{1i}^{j\varkappa_1}|^{(-\frac{1}{p} + \varkappa_1)q} \Big(\int_{\Delta X_{1i}^{j\varkappa_1}} dx_1 \int_{\Delta X_2^i} \sum_{|\kappa| = \alpha} |D^\kappa f|^p dx_2 \Big)^{q/p} =$$

$$= |\Delta X_2^i|^{\varkappa_1 q} \Big(\int_0^1 dx_1 \int_{\Delta X_2^i} \sum_{|\kappa| = \alpha} |D^\kappa f|^p dx_2 \Big)^{q/p}, \qquad (3.4)$$

где $K = (K_1, K_2)$, $|K| = K_1 + K_2$.

При каждом $\varkappa_1 \geqslant 1$ рекуррентная система (3.4) имеет, как легко показать, некоторое конечное число $N_{j\varkappa_1}$ решений. Упорядочим полученное множество точек $\{X_{1i}^{j\varkappa_1} : 0 \leqslant j \leqslant N_{j\varkappa_1}, 1 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \alpha\}$ отрезка

$0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ по возрастанию, переобозначив их через $0 = x_{1i}^0 < x_{1i}^1 < \ldots < x_{1i}^{M} = 1$. Из условий (3.4) тогда следует, что

$$|\Delta x_{1i}^j|^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\varkappa_1)q} \Big(\int_{\Delta x_{1i}^j} dx_1 \int_{\Delta x_2^i} \sum_{|k|=\alpha} |D^k f|^p dx_2 \Big)^{q/p} \leqslant$$

$$\leqslant |\Delta x_{1i}^j| |\Delta x_2^i|^{\varkappa_2 q} \int_{\Delta x_2^i} dx_2 \int_0^1 \sum_{|k|=\alpha} |D^k f|^p dx_1 \Big)^{q/p} .$$

Подставляя последние оценки в правую часть неравенства (3.1) и оценивая внутреннюю сумму по j при $\varkappa = (0, \alpha)$ с помощью неравенства Гельдера с показателями $S' = p/q$, $S = p/(p-q) (p \neq q)$, получим при $0 < q \leqslant p < \infty$

$$\| f(x) - g_M(x, f) \|_{L_q(I^2)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 (\alpha+1)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{i=1}^{N} |\Delta x_2^i|^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\alpha)} \Big(\int_{\Delta x_2^i} dx_2 \int_0^1 \sum_{|k|=\alpha} |D^k f|^p dx_1 \Big)^{\frac{q}{p}} \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Учитывая условия (3.3), получаем отсюда оценку

$$\| f(x) - g_M(x, f) \|_{L_q(I^2)} \leqslant C_1 (\alpha+1)^{1/q} N^{-\alpha} \| f \|_{L_q^\alpha (I^2)} ,$$

где $N = M/(\ell+1)$. Для чисел M вида $N(\ell+1)$ неравенство (3.2) с константой $C_2 = C_1(\alpha+1)^{1/q} (\ell+1)^{\alpha}$ доказано. Для завершения доказательства теоремы 3.1 достаточно заметить, что при $(\ell+1)N < M < (\ell+1)(N+1)$

$$E_M(f, g) \leqslant E_{(\ell+1)N}(f, g).$$

Если проследить за всеми константами C, C_1, C_2, то можно обнаружить, что константа $C_2(p, q, \alpha)$ в теореме 3.1 остается ограниченной при $p \to \infty$, $q \to \infty$. Отсюда получаем, что теорема 3.1 остается справедливой и при $p = q = \infty$.

Автор выражает искренную благодарность профессору Н.И. Черных за постановку задачи и большую помощь в работе.

Литература

1. М.Ш.Бирман, М.З.Соломяк. Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α // Математ. сб. 1967. Т.73 (115). N 3. С.331-355.

2. И.Стейн, Г.Вейс. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. - М.: Мир, 1974.

3. М-Б.А.Бабаев. Приближение функций многих переменных комбинациями функций меньшего числа переменных: Дис. ...докт.физ.-мат.наук/ Баку, 1991.

А.С.Борухович,
С.А.Винтовкин

К ТЕОРИИ ПАРНОГО И ОДНОЧАСТИЧНОГО ТУННЕЛИРОВАНИЯ СКВОЗЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЙ МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫЙ БАРЬЕР

История данного вопроса берет свое начало в работе по созданию туннельных диодов с барьером из магнитного полупроводника - сульфида и селенида европия, установивших зависимость туннельного тока от степени упорядочения 4f - спинов ионов европия в барьере [1,2]. Возникающие при таком туннелировании спин-ориентационные эффекты в барьере позволяют наблюдать на выходе из него спин-поляризованный поток электронов, что послужило созданию твердотельных спиновых фильтров M - EuS (EuO). Здесь M - нормальный металл [3].

Работа подобных устройств, а также контактов типа полупроводник -магнитный полупроводник [4], способных оказаться источником излучения в субмиллиметровом диапазоне, основана на эффектах одночастичного туннелирования. Сложнее обстоит дело с возможностью парного (куперовского, джозефсоновского) туннелирования сквозь магнитоупорядоченный барьер. Хотя появились экспериментальные работы, допускающие такое туннелирование [5,6], его теория не разработана. Как правило, в теории рассматривается вопрос взаимодействия куперовских пар с отдельными локализованными в барьере примесями.

Ниже обсуждается вопрос о возможности парного туннелирования